Gekoppelte Pendel kann man auf der Luftkissenbahn mit Hilfe von Gleitern realisieren, die durch Spiralfedern gekoppelt und gehalten werden. In den Lehrbüchern wird meist der Spezialfall behandelt, dass die Pendelkörper gleiche Masse haben. Auch die Federn sind in der Regel gleich oder so beschaffen, dass die Anordnung symmetrisch zu einer Mittelachse ist. Wir beschränken uns auf gekoppelte Pendel mit nur zwei Massen, wollen aber von der Symmetrie abweichen, indem wir diese Massen unterschiedlich groß machen. Die Frage ist, wie die Frequenzen der Normalschwingungen vom Verhältnis der beiden Massen abhängen. Unsere Anordnung zeigt Abbildung 1.

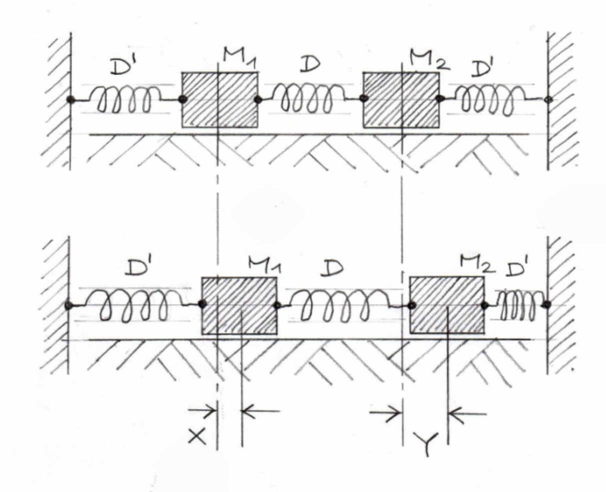

Abbildung 1 Zwei gekoppelte Pendel, z. B. Gleiter auf einer Luftkissenbahn, die durch eine Spiralfeder (Federkonstante D) gekoppelt sind und außen von zwei weiteren Federn (Federkonstante D') gehalten werden. Beachte, dass die Massen M_1 und M_2 der Pendelkörper im vorliegenden Fall nicht gleich sein müssen. Oben: Ruhelage, unten: beide Federn ausgelenkt

Die Massen der Pendelkörper (Gleiter) seien M_1 und M_2. Wie in der Abbildung bezeichnet, habe die zwischen den Massen befindliche Feder die Federkonstante D, während die beiden Federn, die die Gleiter auf der Luftkissenbahn fixieren, die Konstante D' haben.

Die Frequenzen der Normalschwingungen sind die Lösungen der Gleichung[1]

(1) $$\left(\omega^2\right)^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\omega^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

mit

(2) $$a_{11} = \frac{D' + D}{M_1}, \quad a_{12} = \frac{-D}{M_1}, \quad a_{21} = \frac{-D}{M_2}, \quad a_{22} = \frac{D' + D}{M_2}$$

Das ist eine quadratische Gleichung in ω^2. Deren Lösungen sind

(3) $$\begin{aligned}\omega_{1,2}^2 &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{11} + a_{22}\right)^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{21}a_{12}} \\ &= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{21}a_{12}}\end{aligned}.$$

Ausgedrückt durch die Massen und Federkonstanten in (2) folgt

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{D'+D}{M_1} + \frac{D'+D}{M_2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{D'+D}{M_1} - \frac{D'+D}{M_2}\right)^2 + 4\frac{D^2}{M_1 M_2}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{D'+D}{M_1}\left(1 + \frac{M_1}{M_2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{D'+D}{M_1}\right)^2\left(1 - \frac{M_1}{M_2}\right)^2 + 4\left(\frac{D}{M_1}\right)^2\frac{M_1}{M_2}} \; .$$

Setzt man zur Abkürzung $x = M_2/M_1$, erhält man

$$(4) \qquad \omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\,\frac{D'+D}{M_1}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{D'+D}{M_1}\right)^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{D}{M_1}\right)^2\frac{1}{x}} \; .$$

Daraus folgen die Frequenzen f der Normalschwingungen ($f = \omega/2\pi$). Die beiden Lösungen bedeuten, dass es genau zwei dieser Schwingungen gibt. Man kann zeigen[1], dass den Normalschwingungen zwei charakteristische Relativbewegungen der Pendelkörper entsprechen: Bei der Schwingung mit der kleineren Frequenz (Minuszeichen in obiger Gleichung) bewegen sie sich *gleichphasig* mit konstantem Abstand nach links und rechts. Bei der Schwingung mit der größeren Frequenz (Pluszeichen in obiger Gleichung) bewegen sie sich abwechselnd aufeinander zu oder voneinander weg, also *gegenphasig*.

Abbildung 2 zeigt die Frequenzen der Normalschwingungen für $D' = 3$ N/m, $D = 6$ N/m und $M_1 = 0{,}2$ kg, aufgetragen als Funktion von x (= M_2/M_1). Die Parameter D', D und M_1 entsprechen Werten, die experimentell realisierbar sind. Das Massenverhältnis kann nur in begrenztem Umfang variiert werden, da die Tragfähigkeit der Luftkissenbahn Massen größer als 0,5 kg nicht zulässt.

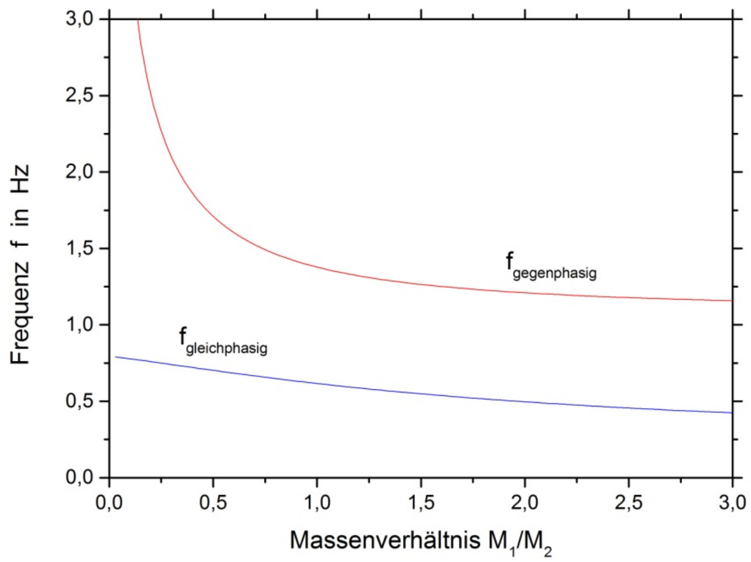

Abbildung 2 Frequenzen der Normalschwingungen der gekoppelten Pendel in Abbildung 1, als Funktion des Massenverhältnisses M_2/M_1. Theoretische Berechnung für $D' = 3$ N/m, $D = 6$ N/m und $M_1 = 0{,}2$ kg. Rot: Gegenphasige Bewegung - Plus-Zeichen in Gleichung (4), Blau: Gleichphasige Bewegung - Minus-Zeichen in Gleichung (4)

Da die Frequenzen von der Größenordnung 1 Hz sind, konnten sie mit der Stoppuhr bestimmt werden. Wiederholte Messungen zeigten, dass man mit einer Genauigkeit von 2..3 % rechnen kann. Das Experiment ergab die Tabelle 1 aufgeführten Werte.

Tabelle 1 Messergebnis

M_1/kg	M_2/kg	$D = D' = 3$ N/m		$D = 6$ N/m, $D' = 3$ N/m	
		$f_{gleichphasig}$/Hz	$f_{gegenphasig}$/Hz	$f_{gleichphasig}$/Hz	$f_{gegenphasig}$/Hz
0,2	0,2	0,614 ± 0,016	1,113 ± 0,022	0,603 ± 0,018	1,406 ± 0,023
0,2	0,3	0,547 ± 0,010	1,052 ± 0,034	0,553 ± 0,017	1,284 ± 0,043
0,2	0,4	0,503 ± 0,015	0,997 ± 0,033	0,496 ± 0,016	1,212 ± 0,038
0,2	0,5	0,443 ± 0,014	0,971 ± 0,019	0,447 ± 0,014	1,205 ± 0,029

In Abbildung 3 sind die Messpunkte für $D' = 3$ N/m, $D = 6$ N/m und $M_1 = 0{,}2$ kg den theoretisch berechneten Werten gegenübergestellt. Die Übereinstimmung innerhalb der Fehlergrenzen ist recht gut.

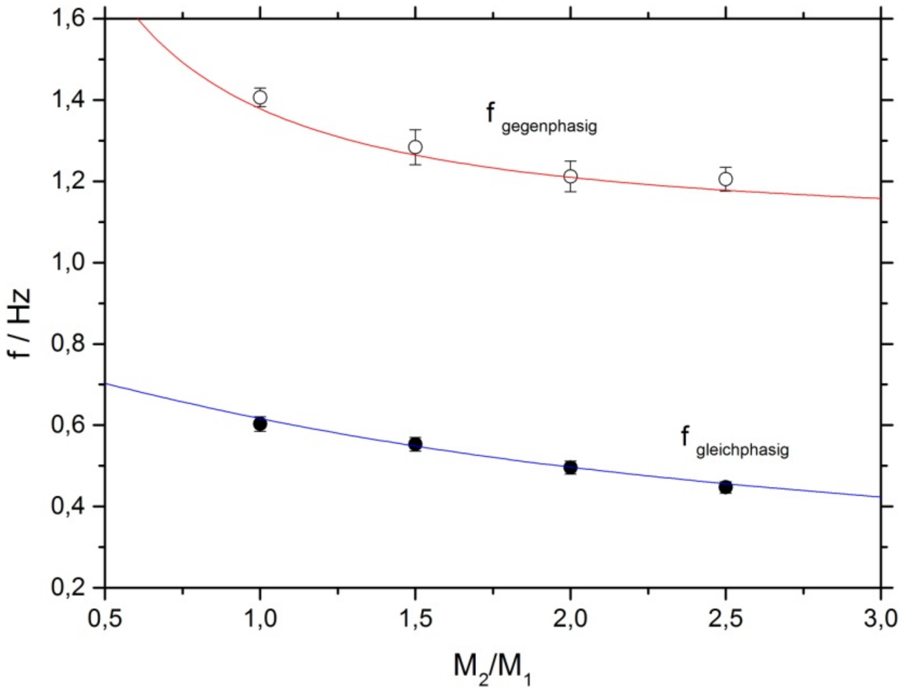

Abbildung 3 Messpunkte für $D' = 3$ N/m, $D = 6$ N/m und $M_1 = 0{,}2$ kg und die nach Gleichung (4) berechneten theoretischen Kurven. Wie in Abbildung 3 gilt: Rot entspricht der gegenphasigen Bewegung, also dem Plus-Zeichen in Gleichung (4), Blau der gleichphasigen Bewegung und dem Minus-Zeichen in Gleichung (4)

Das Ergebnis des Experiments ist, insgesamt betrachtet, nicht umwerfend. Bemerkenswert ist aber, dass Theorie und Experiment gut übereinstimmen. Die Frequenzen der Normalschwingungen sind die Eigenwerte einer Matrix, insofern ist auch die Theorie nicht uninteressant.

[1] Eigenwerte Gekoppelte Pendel (interner Link)